3 КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР
3.1 Негізгі анықтамалар

Функция ұғымын енгізбестен бұрын комплекс сандар жиынына байланысты кейбір қажетті ұғымдарды енгізіп алайық.

z_0 *нүктесінің* ε *- аймағы* деп жазықтықтың $|z - z_0| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерін, яғни центрі z_0 нүктесі, радиусы ε болатын ашық дөңгелекті айтамыз.

z_0 *нүктесінің ойық (тесік)* ε *- аймағы* деп жазықтықтың $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерін, яғни z_0 центрі аласталған $|z - z_0| < \varepsilon$ ашық дөңгелегін айтамыз.

Жиынның ішкі нүктесі деп, осы жиында өзінің қандай да бір аймағымен жататын нүктені айтамыз.

Ашық жиын деп тек ішкі нүктелерден тұратын жиынды айтамыз.

Жиынның шекаралық нүктесі деп кез келген аймағында осы жиынға тиісті де тиіссіз де нүктелер бар болатын нүктені айтамыз.

Жиынның шекарасы деп оның барлық шекаралық нүктелерінің жиынын айтамыз.

Жиынның тұйықталуы деп жиын мен оның шекарасының бірігуін айтамыз. А жиынының тұйықталуы $\overline{A}$ түрінде белгіленеді.

Тұйық жиын деп өзінің тұйықталуына тең жиынды айтамыз.

Матаулы жиын деп кез келген екі нүктесін осы жиында жататын үзіліссіз сызықпен жалғауға болатын жиынды айтамыз.

Облыс деп кез келген матаулы ашық жиынды айтамыз.

Облыс бір матаулы деп аталады, егер оған іштей сызылған кез келген тұйық контур шектейтін жиын облыстың ішкі жиыны болса.

Тұйық облыс деп облыстың тұйықталуын айтамыз, яғни D облыс болса $\overline{D}$ тұйық облыс болады.

Шектелген облыс деп қандай да бір дөңгелекке ішкі жиын болатын облысты айтамыз.

Анықтама 10. Егер белгілі бір f заңы бойынша К жиынының әрбір z комплекс санына бір немесе бірнеше w комплекс саны сәйкестікке қойылса, онда К жиынында анықталған z айнымалысының функциясы f берілген дейміз де, оны

$$w = f(z), \quad z \in K \tag{3.1}$$

түрінде жазамыз.

K аталған функцияның *анықталу жиыны,* ал $L = \{w : w = f(z), z \in K\}$ *өзгеру жиыны* деп аталады.

Егер әрбір z санына тек бір ғана w саны сәйкестікке қойылса, онда (3.1) функциясы *бірмәнді*, басқа жағдайда *көпмәнді* деп аталады.

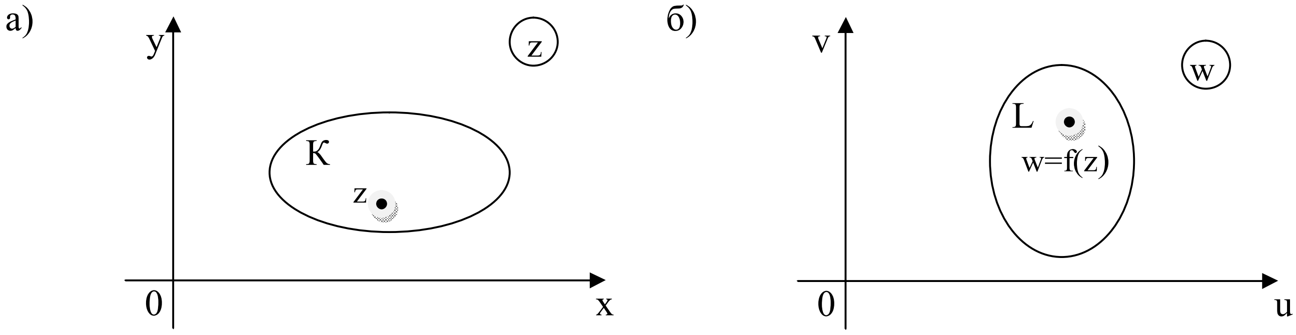
Егер $z = x + iy, \quad w = u + iv$ деп ұйғарсақ, онда

$$w = f(z) \Leftrightarrow w = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

теңдігіне келеміз, бұдан

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \qquad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y).$$

K анықталу жиыны z (x0y) жазықтығында, *L* өзгеру жиыны w (u0v) жазықтығында кескінделеді.



Сурет 5

Егер $w = \mathrm{f(z)}$ болса, онда w берілген z нүктесінің, ал L - К жиынының *бейнесі* деп аталады (Сурет 5а, 5б).

3.2 Тізбектер мен функциялар шектері. Функцияның үздіксіздігі

Бізге $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ комплекс сандар тізбегі берілсін, мұндағы $z_n = f(n)$, $n \in N$ - тізбектің жалпы мүшесі ($f(n)$ - бірмәнді функция), N барлық натурал сандар жиыны.

Анықтама 11. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $M(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n > M(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық *n* нөмірлері үшін

$$|z_n - z_0| < \varepsilon$$

теңсіздігі орынды болса, онда z_0 комплекс саны $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ комплекс сандар *тізбегінің шегі* деп аталады.

z_0 санының z_n тізбегінің шегі болуы

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$$

түрінде белгіленеді.

Комплекс сандардың теңдігінің белгісі бойынша, егер $z_n = x_n + iy_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$ болса, онда $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ және $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0$.

Бұл тұжырымнан, x_n және y_n нақты сандар тізбектері болғандықтан, нақты тізбектердің қасиеттері комплекс сандар тізбектеріне де орынды болады.

Анықтама 12. Егер $\forall\, E > 0$ $M(E)$ нөмірі табылып $n > M$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық *n* нөмірлері үшін

$$|z_n| > E$$

теңсіздігі орынды болса, онда $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$ дейміз.

Бұл жағдайда z_n тізбегін *шексіз алыстағы нүктеге жинақталады* деп айтамыз. Сонымен *шексіз алыстағы нүкте* деп аталатын $z = \infty$ нүктесі енгізілді.

$z = \infty$ нүктесінің аймағы деп $|z| > R \geq 0$ теңсіздігімен анықталатын жиынды, яғни $|z| = R$ шеңберінің сыртын айтамыз.

Комплекс сандар жазықтығын $z = \infty$ шексіз алыстағы нүктесімен толықтырып *комплекс сандардың кеңейтілген жазықтығын* аламыз.

Сонымен комплекс сандар тізбегінің шегі бар болса, онда ол не санға, не шексіздікке тең болады. Бірінші жағдайда *шек тиянақты*, ал *тізбек жинақты* деп аталады.

Енді $W = f(z),\ z \in K$ функциясының нүктедегі және шексіздіктегі шектері ұғымдарын берейік.

Функцияның нүктедегі шегі.

Анықтама 13.

1) Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ саны табылып $0 < |z - z_0| < \delta$ және $z \in K$ шарттарын қанағаттандыратын барлық z үшін

$|f(z) - A| < \varepsilon$

теңсіздігі орындалса, онда A саны $W = f(z),\ z \in K$ *бірмәнді функциясының* z айнымалысы z_0 санына ұмтылғандағы *шегі* деп аталады

Белгіленуі: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

2) Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ табылып $0 < |z - z_0| < \delta$ және $z \in K$ шарттарын қанағаттандыратын барлық z үшін

$|f(z)| > \varepsilon$

теңсіздігі орындалса, онда $W = f(z),\ z \in K$ *бірмәнді функциясының* z айнымалысы z_0 санына ұмтылғандағы *шегі шексіздікке тең* дейміз.

Белгіленуі: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Функцияның шексіздіктегі шегі.

Анықтама 14.

1) Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta(\varepsilon) > 0$ табылып $|z| > \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық z үшін

$|f(z) - A| < \varepsilon$

теңсіздігі орындалса, онда A саны $W = f(z)$ *бірмәнді функциясының* z айнымалысы ∞ - *шексіз алыстағы (*немесе *шексіздіктегі шегі) нүктеге ұмтылғандағы шегі* деп аталады.

Белгіленуі: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A$.

2) Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta(\varepsilon) > 0$ табылып $|z| > \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық z үшін

$|f(z)| > \varepsilon$

теңсіздігі орындалса, онда $W = f(z)$ *бірмәнді функциясының* z айнымалысы ∞ - *шексіз алыстағы нүктеге ұмтылғандағы шегі (немесе* *шексіздіктегі шегі) шексіздікке тең* дейміз.

Белгіленуі: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Анықтама 15. Егер

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

болса, онда $f(z)$ функциясы $z_0 \in D$ *нүктесінде үздіксіз* (*немесе* үзіліссіз) деп аталады.

Анықтамадан, функцияның z нүктесінде үздіксіз болуы

$$\lim_{\Delta z\to 0} \Delta W = \lim_{\Delta z\to 0} \left(f(z+\Delta z) - f(z)\right) = 0$$

теңдігінің орындалуымен пара-пар екендігі шығады.

Анықтама 16. Егер $W = f(z)$ функциясы D жиынының әрбір нүктесінде үздіксіз болса, онда ол D жиынында *үздіксіз* деп аталады.

Егер $f(z)$ және $\varphi(z)$ функциялары z_0 нүктесінде үздіксіз болса, онда z_0 нүктесінде $\left(f(z) \pm \varphi(z)\right)$ және $f(z)\cdot\varphi(z)$ функциялары, ал $\varphi(z_0) \neq 0$ болса $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ функциясы да үздіксіз болады.